Library and Information Science No. 26 1988

ビブリオメトリクスの法則間の類似関係から導かれる Bradford の数式表現

Mathematical Formulations of Bradford's Law Derived from Relationships among Bibliometric Laws

岸　田　和　明
Kazuaki Kishida

Résumé

This paper describes the result of following two kinds of studies.

1) to derive a similarity among some bibliometric laws
2) to mathematically represent Bradford's law based on the similarity and to show the adequacy of the representation.

In terms of the first study, it was shown that a similarity which unified these laws was identified, and that Mandelbrot's law was a general form of Zipf's law.

On the other hand, the mathematical representation of Bradford's law traditionally used was not strictly coincided with an integral approximation to the summation of Zipf's or Mandelbrot's laws.

Therefore, the author derived a new mathematical representation of Bradford's law and examined successfully its validity by the data used for having shown traditional represention.

岸田和明；慶應義塾大学大学院文学研究科図書館・情報学専攻修士課程，東京都港区三田2-15-45
Kazuaki Kishida: Graduate School of Library and Information Science, Keio University, 2-15-45, Mita Minato-ku, Tokyo.
1989年3月28日受付

I. はじめに

図書館・情報学が対象とする様々な場面において，多くの「skew distribution」[1] が観察され，その数式化が試みられてきた。それには，Bradford, Zipf, Lotka などの先駆者あるいは発見者の名が冠せられている。これらの法則はその対象・適用場面は異なるけれども，いずれも本質的には，この「skewness」を記述したものであり，非常に近い類似関係にある。

これらのいわゆるビブリオメトリクスの諸法則が類似関係にあるという事実は，以前より多くの研究者によって指摘されてきた。Bradford の法則に関する研究を網羅的にレビューした海野[2] には，その最初のものとして Kendall[3] や Simon[6] が提示されており，さらに，Fairthrone[5] と Brookes[6] が挙げられている。しかしながら，実際にこの問題に言及した研究は他にも存在し，最近のものとしては，小野寺[7], Yablonsky[8], Haitun[9], Egghe[10] 等がある。

このように，Zipf の法則や Bradord の法則などのビブリオメトリクスの法則間の類似性が，多くの研究者の興味を引いてきたのは，ただ単に各法則が数学的には近似的に等しいという事実を証明することの価値のためだけでない。もうひとつの理由として，その類似関係を明らかにすることにより，各法則の構造がより明確となり，各法則の数学的な性質をさらに知ることができるということがある。しかしながら，この後者の意味からはビブリオメトリクスの各法則の関係が十分に論じ尽くされたとは思われない。例えば，Zipf の法則を積分することにより，Bradford の法則として頻繁に用いられている対数関数を導くことはたやすいが，その積分の意味や妥当性など，議論すべき問題は残っている。さらにそのような議論を通して，より妥当性のある数式表現が導出される可能性もある。

そこで本論文ではまず，Zipf, Bradford, Lotka, Pareto の各法則間の数式表現についての厳密な関係の導出を試みる。次に，その関係を用いて，Bradford の法則の数学的性質を論じ，そこから導かれる新しい数式表現を提出する。なお以降，便宜的に，Zipf, Bradford, Lotka, Pareto の各法則を「ビブリオメトリクスの法則」と総称する。

II. ビブリオメトリクスの法則間の類似関係

本章では，微積分を含む数学的な操作によって，ビブリオメトリクスの諸法則の数式表現が類似関係にあることを詳細に示す。

ビブリオメトリクスの諸法則を統一的に論じるためには，用語の統一が必要である。便宜的に「生産者」と「生産物」という語を用いることにする。「生産者」とは具体的には，例えば，Zipf の法則における単語，Bradford の法則における雑誌，Lotka の法則における著者を指す。これに対して，単語の出現頻度，雑誌の関連文献掲載数，著者の発表論文数を「生産物」とする。

A. 度数分布と順位分布との関係

Zipf の法則と Bradford の法則が，その独立変数に順位をとる分布であり，一方，Lotka の法則，Pareto 分布が通常の統計学で扱われる度数分布であることは，一般的によく知られている事実である。そこで，各法則間の類似関係を示す前に，まず，この二種類の分布間の関係を明らかにする。

各生産者の生産物の大きさを x で表わし，各 x の度数分布を $n(x)$ と記す。

一方，各生産者をその生産物の大きさの順に並べたときの，ある生産者の順位を r とする。その生産者の生産物の大きさを $x=s$ とすれば，この r は度数分布 $n(x)$ を用いて，

$$r=1+\left[N-\sum_{x=1}^{s}n(x)\right]=1+\sum_{x=s+1}^{j}n(x) \qquad (1)$$

と求めることができる[2]。ただし $j=x_{\max}$ で，最大の生産物を持つ生産者を示す。ここで通常，和を積分で近似するという操作が行われる。ここでも $n(x)$ を連続関数とみなして，(1)式の和を積分に置き換えれば，順位 r は，

$$r\sim\int_{x}^{\infty}n(x)\,dx \qquad (2)$$

となる。

この順位 r と x との関係をしめすものが，いわゆる順位—サイズ関係であり，これを $x(r)$ と表記する。以下この $x=x(r)$ を順位分布と称する。この順位分布とは視覚的には，横軸に生産者の順位，縦軸にその生産物の大きさ（サイズ）をとったものである[9]。

(2)式が有効であれば，この順位分布と度数分布の変換公式は簡単に導くことができる。すなわち，$x=x(r)$ に(2)式を代入し，さらに逆関数 $r=x^{-1}(x)$ を用いて，これを $n(x)$ について解けば，

$$n(x)=-\frac{d}{dx}x^{-1}(x) \qquad (3)$$

なる関係が得られる。特に，$n(x)$ を規格化する場合はその確率密度関数を $f(x)$ と表記すれば，(3)式と同様に，

$$f(x)=-\frac{1}{N}\frac{d}{dx}x^{-1}(x)$$

が得られる。

B. Zipf の法則

Zipf の法則は，c を定数として，

$$x(r)=\frac{c}{r^a} \qquad (4)$$

である[9]が，これを r について解くと，

$$r=(c/x)^{1/a} \qquad (5)$$

ここで，(4)式を r で微分し，そこに(5)式を代入すると

$$\frac{dr}{dx}=\left[-ca\left(\frac{c}{x}\right)^{-(a+1)/a}\right]^{-1}$$

となる。これを変換公式(3)に代入すると，

$$n(x)=\frac{1}{ca}\left(\frac{c}{x}\right)^{(a+1)/a}=\frac{c^{(1+1/a)}}{ca}x^{-(1+1/a)} \qquad (6)$$

であるが，$p=1/a$ とおけば，

$$n(x)=c^p p x^{-(1+p)} \qquad (7)$$

となる。さらに，ここで，定数部分をまとめて，

$$\omega=c^p p=c^{(1/a)}/a \qquad (8)$$

とおけば，(7)式は，

$$n(x)=\omega x^{-(1+p)} \qquad (9)$$

となる。これは，本来は順位分布である Zipf の法則の度数分布型である。本論文では，(9)式を Zipf の度数分布と呼ぶ。この(9)式は，Simon[4]，Price[11]，小野寺[7] らが，いくつかの抽象化された数学的前提から導出したビブリオメトリクスの法則についての演繹的モデルにほぼ等しいことに注意すべきである[12]。

C. Pareto 分布

Pareto 分布は，所得分布として，主に経済学の分野で問題とされる分布である。しかしながら，Zipf の法則などと一緒に論じられることが多いので，本論文では特に「ビブリオメトリクスの法則」に含めて，議論の対象とすることとした。

(6)式の右辺第1式に(9)式同様，$p=1/a$ を適用すると，

$$n(x)=\frac{p}{c}\left(\frac{c}{x}\right)^{p+1}$$

となるが，これが，$c\leqq x<\infty$ のときに限って成り立つとする。すなわち，

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{p}{c}\left(\dfrac{c}{x}\right)^{p+1}, & c\leqq x<\infty\\ 0, & x<c\end{cases} \qquad (10)$$

とすれば，この(10)式は Pareto 分布に一致する（a, c は正の実数とする）。

D. Lotka の法則

多くの研究者が指摘しているように，(9)式において $p=1$（つまり $a=1$）の場合，すなわち，

$$n(x)=\omega x^{-2} \qquad (11)$$

が，Lotka の法則である。つまり，Zipf の法則（順位分布）で $a=1$ の場合が，Lotka の法則（度数分布）に対応することになる。

ところで，最も生産数の大きい生産者の数を1と仮定すれば，

$$n(j)=\frac{\omega}{j^2}=1 \quad \therefore \omega=j^2$$

なので（$x_{\max}=j$），(11)式は，

$$n(x)=\left(\frac{j}{x}\right)^2$$

と表すことができる。

また，Lotka の法則(11)を規格化すると，

$$f(x)=\frac{\omega}{Nx^2}=\frac{\omega/N}{x^2} \qquad (12)$$

である（Nは生産者の総数）が，この総和は1であるから，

$$\sum_{x=1}^{j} f(x) = (\omega/N) \sum_{x=1}^{j} x^{-2} = 1$$

が成り立つ。ここで，$j=\infty$とおくと，$\sum_{x=1}^{\infty} x^{-2}$は，Riemann のツェータ関数$\zeta(k)$の $k=2$ の場合であるから，

$$\zeta(2) = \pi^2/6 = 1.64493\cdots$$

である。そこで，(12)式より，

$$\omega/N = 1/\zeta(2) = 6/\pi^2 = 0.6079\cdots$$

と定数が定まる。よって，(12)式は，$j=\infty$ならば，

$$f(x) = \frac{6/\pi^2}{x^2} \doteqdot \frac{0.6}{x^2}$$

となる。これは，Yablonsky[8] が示した Lotka の法則の表式である。

E. Mandelbrot の法則

次は逆に，(9)式を(2)式に代入する。つまり，度数分布から，生産物が x' の生産者の順位を求める。(2)式の積分区間を $[x', j]$ に変更して，積分を実行すると，

$$r = \int_{x'}^{j} \omega x^{-(1+p)}\, dx = \frac{\omega}{p}\left(\frac{1}{x'^p} - \frac{1}{j^p}\right)$$

となる ($p \neq 0$)。これから，x' について解き，x' を x に戻すと，

$$x^p = \frac{\omega j^p}{rpj^p + \omega}$$

であるが，ここで，右辺の分子，分母に $1/pj^p$ をかけて整理すると，

$$x = \left[\frac{\omega/p}{r + (\omega/pj^p)}\right]^{1/p} \tag{13}$$

となる。分子は，ω を(8)式で戻すと，

$$(\omega/p)^{1/p} = c$$

となり，また，

$$K = \omega/pj^p = (c/j)^p \tag{14}$$

とおくと，$a=1/p$ であるから，(13)式は，

$$x(r) = \frac{c}{(r+K)^a} \tag{15}$$

と変形される。この(15)式は，Mandelbrot の法則に一致する。

ここで，(15)式において $j\to\infty$ とすれば，$K\to 0$ であり，(15)式は，Zipf の順位分布(4)式に近づく。したがって，「順位分布については，生産物の最大が無限に近く大きければ，Zipf の順位分布(4)式が成り立ち，生産物の最大が無限で近似できないような大きさならば，Mandelbrot の法則(15)式が成り立つ。」と言うことができる。簡単に言えば，Mandelbrot の法則は Zipf の法則（順位分布）の一般形である。

F. Bradford の法則

数多くのビブリオメトリクスの法則のなかで，図書館の場で最も注目されるのは，Bradford の法則である。これは，Bradford の法則がある特定主題について，雑誌とその関係論文数との関係を示しているためであるが，その他，Bradford の法則は雑誌タイトルの貸出回数の分布や図書の貸出回数の分布にあてはまることも報告されており[13]，図書館運営への応用の可能性を大きく持った法則であると言える。そのため，特に多くのビブリオメトリクスの研究者たちの関心を引き，さまざまな数式が提案されている。既に述べたように，この多種多様な数式表現を持つ Bradford の法則に関しては，海野[2]の詳しいレビューがある。

しかしながら，Bradford の法則が多種多様な数式表現を持つ最大の理由は，その数式と観測データとの食い違いによるものである。特にいわゆる「Groos のたれさがり」などは最も大きな問題点である。この点に関しては次章にて詳しく論ずることとして，本節では Bradford の法則と他のビブリオメトリクスの法則との関係を簡単に示す。

Bradford の法則には，グラフによる表現と文章による表現とが知られている。まず，グラフ表現に対する数式は，基本的には，

$$X(r) = c \log r \tag{16}$$

である[2]。(16)式は，よく知られているように，Zipf の法則（順位分布）を積分することによって得ることができる。これは，Bradford[14] が示したグラフが，雑誌を関連文献の掲載数が多い順に並べ，その順位の高い雑誌からの掲載文献数の累積を問題としているためである。すなわち，生産者をその生産物数の順に並べたときの順位を独立変数とし，その各生産物数を従属変数とする関数である Zipf の法則を累積すれば，Bradford の法則が得られることになる。実際に，$a=1$ として(4)式を不定積分すれば，(16)式は直ちに導かれる。しかし，厳密に

は，順位1位から r 位までの累積を積分で近似するのであるから，積分区間を[1, $r+1$] とする必要があるので，

$$X(r)=\int_{1}^{r+1} x(r')\,dr'=\int_{1}^{r+1} \frac{c}{r'}\,dr=c\log(r+1) \quad (16)'$$

である。しかしながら(16)式と(16)′式はほぼ等しい。これが，Zipf の法則と Bradford の法則のグラフ表現との関係であり，その類似性が示された。

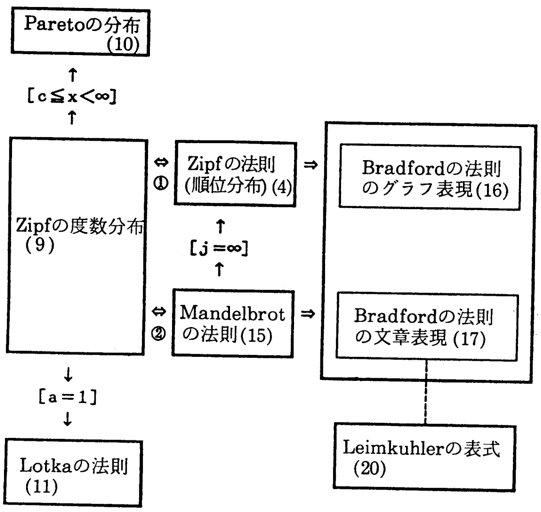
一方，Bradford の法則の文章表現が，

$$X(r)=k\log(1+br) \qquad (17)$$

で与えられることは，Egghe[10] が示しているが，(17)式を微分して，変形すれば，

$$\frac{dX(r)}{dr}=\frac{k/b}{((1/b)+r)}$$

となり，(17)式はかたちの上では，Mandelbrot の法則(15)の $a=1$ の場合に一致する。したがって，Bradford の法則の文章表現には Mandelbrot の法則が対応していることになる。しかし，これは第Ⅲ章で示すように，厳密な一致ではなく，あくまで近似関係である。



<記号の説明>

A← [　] ←B ・・・A は[]内の条件によるBの特殊形
⇔① ・・・区間 [x, ∞] による度数分布―順位分布変換
⇔② ・・・区間 [x, j] による度数分布―順位分布変換
⇒ ・・・積分による近似 (ただしa=1)
---- ・・・相対表現

第1図　ビブリオメトリクスの諸法則間の類似関係

ところで Bradford の法則に関しては，Leimkuhler[15] の表式が知られているが，これを導出するにはまず，ある順位 r までの生産者数の相対値（全体に対する割合）を，

$$z=r/N \qquad (18)$$

とし，さらに，その順位 r までの生産者の累積生産物数の相対値（全体に対する割合）を，

$$Z=X(r)/X(N) \qquad (19)$$

で定義する。そして，この(19)式に，(17)，(18)式を代入すれば，

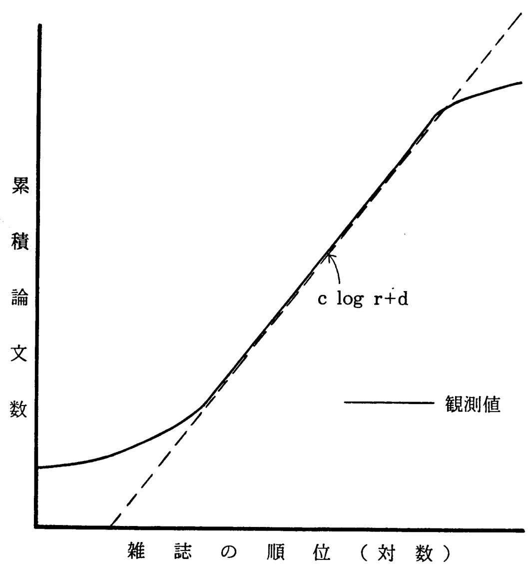
$$Z=\frac{\log(1+bNz)}{\log(1+bN)}=\frac{\log(1+\beta z)}{\log(1+\beta)} \qquad (20)$$

となり，Leimkuhler[15] の表式が得られる（ただし，$\beta=bN$ とおいた）。したがって，Leimkuhler の表式は Bradford の法則の文章表現に対する相対値表現であると言える。

以上で，よく知られたビブリオメトリクスの法則の類似性をほぼ示すことができた。この結果を第1図にまとめる。第1図には，(4)，(9)，(10)，(11)，(15)，(16)，(17)，(20)の各式の類似関係を図示してある。

III. Bradford の法則の数式表現

前章のF節で挙げた(16)，(18)式の他にも，Bradford の



第2図　従来の Bradford の法則の数式表現と実際の観測値とのくい違い

法則に対しては，さまざまな数式表現が提案されている。しかし，観測データへの適合は十分に達せられていないのが現状である。本章では，第1章で明らかにされたビブリオメトリクスの法則間の関係に基づいて，Bradford の法則に対しての新たな数式表現を演繹的に導出する。

A．従来の Bradford の法則の数式表現の問題点

(16)，(17)式に代表されるように，Bradford の法則は従来，対数関数で表現されてきた。その観測データとの典型的なくい違いの例を第2図に示す。

第2図は横軸が対数の片対数グラフであるので，対数関数は直線になる。しかし，実際の観測データはグラフの上方と下方で直線からはずれてたわむ。すなわち，Bradford の法則は(16)式のような単純な対数関数では表現できない。

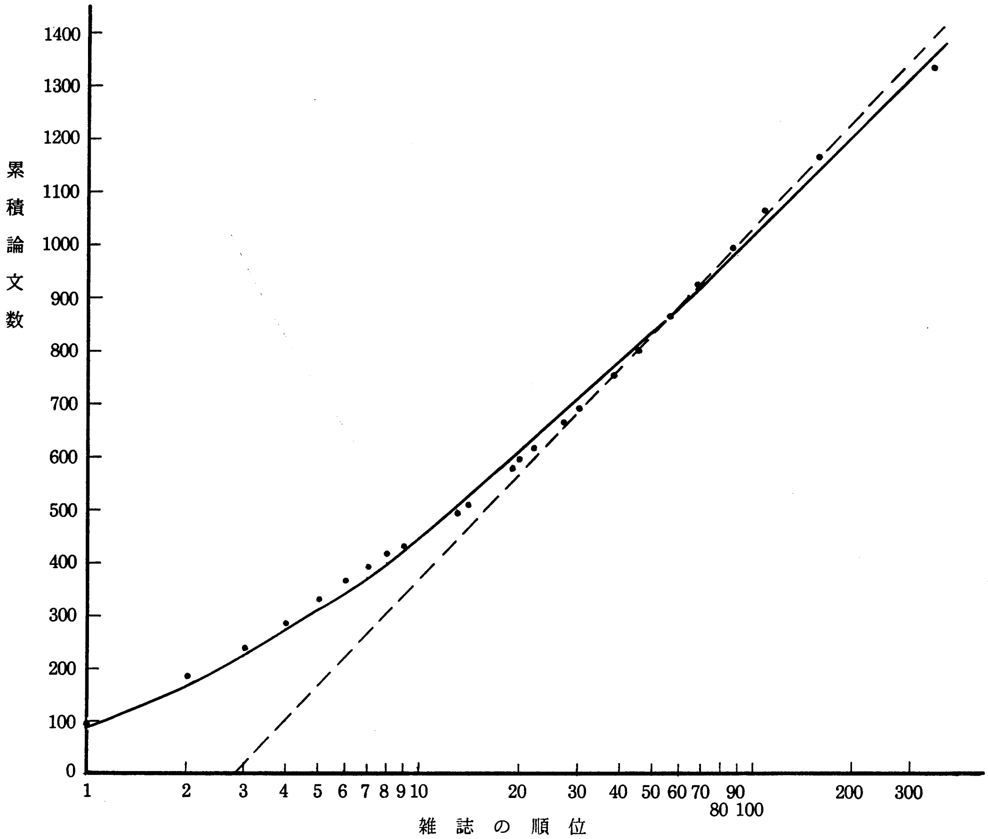
そこで，最も単純な対数関数(16)式に修正を加え，観測データとの適合度を高めようと，さまざまな工夫が試みられてきた。それは，例えば，(16)式に y 切片を加えたり，あるいは変数 r を $r+u$ に変換して，グラフの下方を凸にするような修正であった。これらの工夫を包括する一般的な数式として，Asai[16] は，

$$X(r)=m\log(r+u)+d \tag{21}$$

なる式を導いている。

B．Bradford の法則の数式表現の演繹的導出

前章F節ですでに述べたように，Bradford の法則は，Zipf あるいは Mandelbrot の法則の累積を積分で近似することにより得られる。とくに，前章E節では Mandelbrot の法則が，Zipf の法則の一般形であることが明らかになったからその被積分関数としては，(15)式をとればよいことになる。そこで，Mandelbrot の法則が生産者の順位とその生産物数との関係として妥当とされるな



第3図　演繹的に導かれた数式表現へのデータのあてはめ—Bradford[14]
（パラメターは，c＝271.44，K＝1.37）

らば，それを Bradford の法則の構造にしたがって忠実に積分することにより，かなり妥当な Bradford の法則の数式表現が演繹的に得られると考えられる。そこで，(16)′ 式を導いたときと同様にして，$a=1$ として，

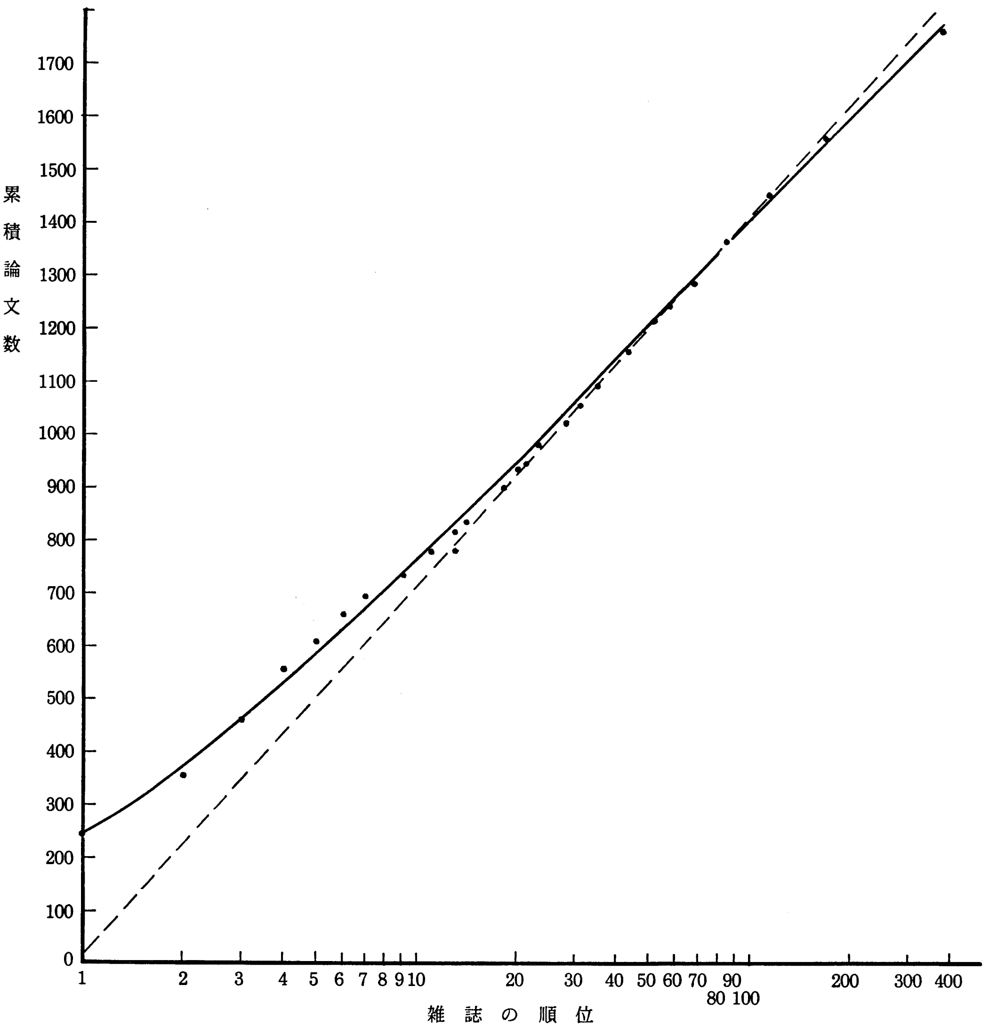
$$X(r)=\int_{1}^{r+1}\frac{c}{(r'+K)}dr'$$

を計算すれば，結局，

$$X(r)=c\log\frac{r+1+K}{1+K} \tag{22}$$

が得られる。(22)式は，データやグラフから帰納的に得られたものではなく，ビブリオメトリクスの諸法則の関係から，Bradford の法則の構造を考慮して得られた，演繹的な数式表現である。(22)式は前章の議論より，他のビブリオメトリクスの諸法則と密接な類似関係にあることが明らかである。例えば，$j(=x_{\max})\to\infty$ ならば(14)式より $K\to0$ となるが，このとき(22)式は(16)′式に一致し，Bradford の法則の数式表現の導出の際，被積分関数として Zipf の法則をとった結果と矛盾しない。

一方，(17)式と(22)式とは同じく Mandelbrot の法則の累積に対応するのにも関わらず，(22)式の計算結果から



第4図 演繹的に導かれた数式表現へのデータのあてはめ—Kendall[3)]
(パラメターは，c＝284.51，K＝0.26)

は，両式が厳密な一致はせず，(17)式はあくまで Mandelbrot の法則と近似的に類似しているにすぎないことがわかる。実際，仮に $K=1/b$ とおいて(17)式を変形すると，

$$X(r)=k\log\frac{r+K}{K}$$

となり，(22)式とは微妙に異なっている。

すなわち，従来の Bradford の法則の数式表現(16)，(17)式は，Zipf—Mandelbrot の法則には正確に対応しておらず，(22)式が Zipf—Mandelbrot の法則の累積を厳密に積分近似した数式表現である。

次に，(22)式の妥当性をみるために，いくつかの先行研究の観測データに(22)式をあてはめてみる。その先行研究とは，Bradford[14]，Kendall[3]，Goffman and Warren[17]，Saracevic and Perk[18] の4つである。その結果を第3図から第6図までにそれぞれ示す。ただし，(22)式のパラメターの推定は非線形最小二乗法で行った（慶應義塾大学三田計算センターの大型計算機上で統計パッケージ SAS [Statistical Analysis System] を使用した)。

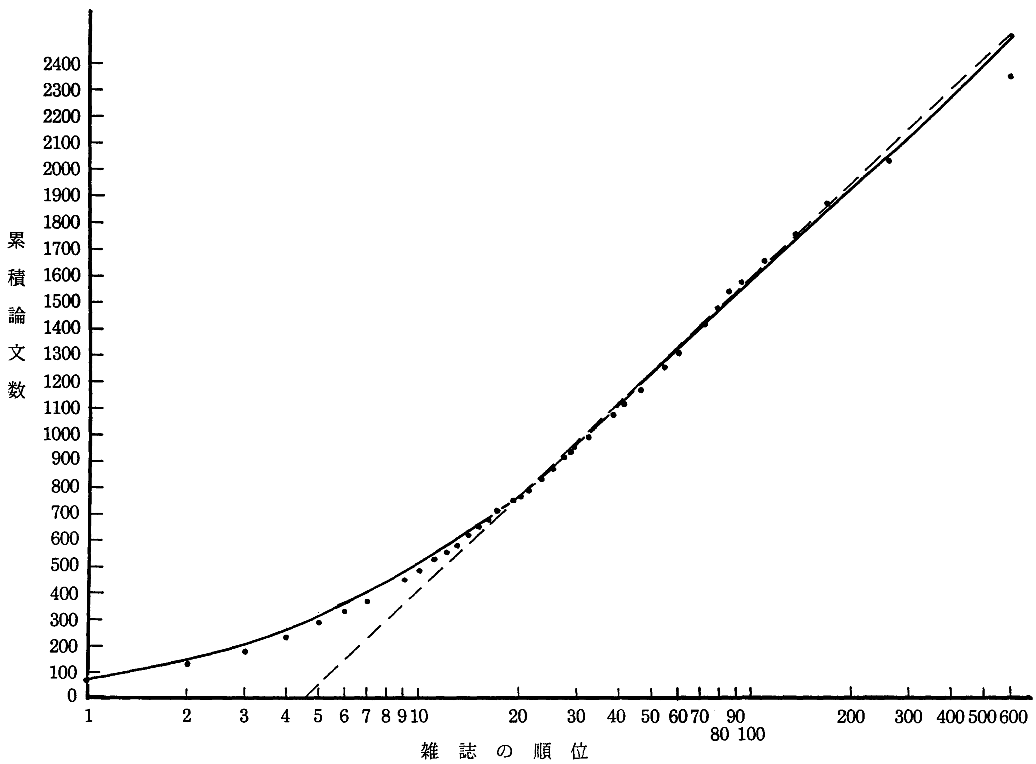
これらの図は片対数グラフであり，そこに実際の観測値をドット，(22)式を実線，単純な対数関数を点線で示してある。これらの図からは(22)式がグラフ下方のたわみをよく記述していることがわかる。すなわち，(22)式は片対数グラフ上で単なる直線とはならず，従来から問題となってきた，いわゆるコアの部分の累積数を正確に表現している。これから，(22)式が Bradford の法則の数式表現として妥当なことが確認できる。

実際，(22)式は，

$$X(r)=c\log(r+K+1)-c\log(1+K)$$

であるから，様々な研究から帰納的に導かれた(16)式と Mandelbrot の法則を正当なものと仮定して演繹的に導出された(22)式とが，非常に類似していることがわかる。

さらに，もうひとつの問題として，$a\neq1$ の場合がある。つまり，Bradford の法則の従来の数式表現が観測値にあまり適合しない原因として，生産物の累積数を求



第5図　演繹的に導かれた数式表現へのデータのあてはめ—Goffman and Warren[17]
（パラメターは，c＝554.75，K＝5.515）

める際の被積分関数である Mandelbrot の法則中の指数が，$a=1$ とはならないことが考えられる。この場合，積分から対数関数は出てこない。

この問題は，小野寺[7] がすでに指摘している。彼は，従来の第2図のような食い違いは，$a=1$ で近似できないからであると結論し，$a\neq1$ ではない場合の数式表現を導いている。

本論文においても，$a\neq1$ の場合の Bradford の法則の数式表現を導出しておくことは有効であると考えられる。そこで，(22)式を導いたときと同様に，(15)式を区間 $[1, r+1]$ で積分する。ただし，$a\neq1$ なので，

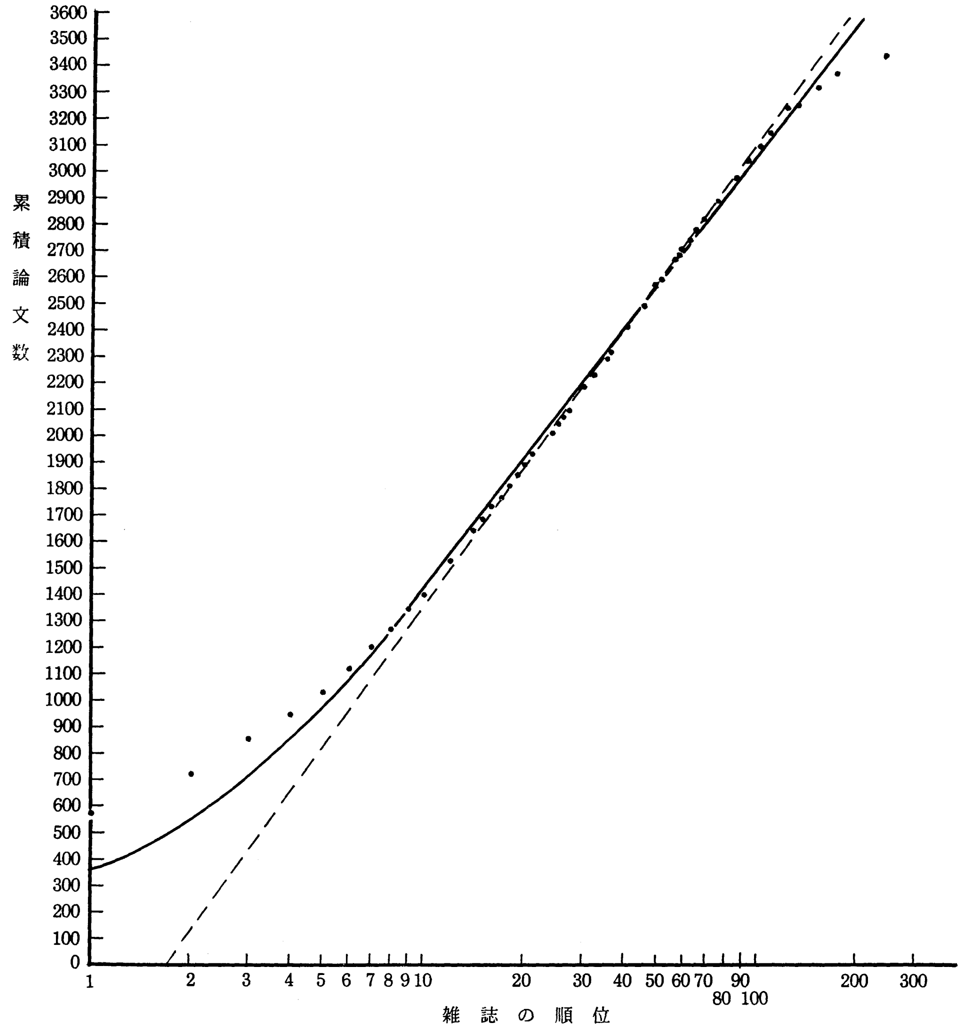
$$X(r)=\int_{1}^{r+1}\frac{c}{(r'+K)^{a}}dr'$$

$$=\frac{c}{a-1}[(1+K)^{1-a}-(r+1+K)^{1-a}]$$

となる。これを(22)式とともにまとめておけば，

$$X(r)=\begin{cases} c\log\dfrac{r+1+K}{1+K}, & a=1 \\ \dfrac{c}{a-1}[(1+K)^{1-a}-(r+1+K)^{1-a}], & a\neq1 \end{cases} \qquad (23)$$

である。



第6図 演繹的に導かれた数式表現へのデータのあてはめ―Sarecevic and Perk[18]
(パラメターは，c =749.93，K=0.678)

また，(23)式において，$j\to\infty$ とすると，

$$X(r)=\begin{cases} c\log(r+1), & a=1 \\ \dfrac{c}{a-1}[1-(r+1)^{1-a}], & a\neq 1 \end{cases}$$

となる。

C. 和分による Bradford の法則の数式表現の評価

(22)式は Mandelbrot の法則の累積操作の積分近似である。したがって，被積分関数である(15)式を連続関数と見なしていることになる。しかし，実際は，Mandelbrot の法則（あるいは Zipf の法則）は連続関数ではない。その独立変数である順位 r は，1, 2, 3, ･･･と離散的に変化する。したがって，生産物の累積数は積分近似よりも，和分を用いたほうがより正確である。そこで本節では，Madelbrot あるいは Zipf の法則の和分による Bradford の法則の数式表現を導出し，それによって，累積の積分近似を評価することを試みる。

和分を Δ^{-1} と表記する。順位 r までの生産物の累積を求めるためには，Mandelbrot の法則(15)式を区間 $[1, r'+1]$ で定和分する必要がある。すなわち，

$$S(r)\equiv\sum_{r=1}^{r}x(r')=\left[\Delta^{-1}\ \frac{c}{(r'+K)^a}\right]_1^{r+1} \qquad (24)$$

であるが，簡単のため $a=1$ とおくと，(24)式は和分の公式より，

$$S(r)=c\,[\psi(r+K+1)-\psi(1+K)] \qquad (25)$$

となる。$\psi(x)$ はディ・ガンマ関数であり，$\Gamma(x)$ をガンマ関数として，$\psi(x)=\Gamma'(x)/\Gamma(x)$ で定義される[19]。$j\to\infty$ すなわち $K\to 0$ ならば，(25)式は，

$$S(r)=c\,[\psi(r+1)+\gamma] \qquad (26)$$

である。ただし γ はオイラーの定数で，$\gamma=0.57721\cdots$ である。(22)式と(25)式とを比較するために，ディ・ガンマ関数に関する公式より，(25)式を漸近展開すると，

$$S(r)\sim c\left[\log\frac{r+K}{K}+\frac{1}{2(r+K)}-\frac{1}{2K}-\frac{1}{12(r+K)^2}+\frac{1}{12K^2}\cdots\right]$$

であるから，r が大きくなるにつれて，(22)式の積分近似がよくなることがわかる。しかし，実際に $X(r)$ の値はかなり大きいので，右辺第4項以下は完全に無視できるし，また，上式の右辺第1項と(22)式との差で第2，3項がある程度相殺されるので，r が小さくても(22)式の近似はかなりよいと考えることができる。

IV. おわりに

本論文では，まず，ビブリオメトリクスの諸法則の類似関係を明らかにし，その結果を用いて，Bradford の法則の数式表現として(22)式や(25)式を演繹的に導出した。さらに，(22)式を先行研究の4つのデータにあてはめたところ，かなりよく適合し，(22)式の妥当性を確認できた。

しかしながら，(22)式は Mandelbrot の法則が妥当であることを前提としている。これは，第II章E節の議論から，Zipf の度数分布(9)式の妥当性に帰着される。しかし，この Zipf の度数分布に関しては，これにかわるものとして，Rao[20]が負の二項分布，Sichel[21]が逆正規ポアソン分布，Burrell[22]が Waring 過程などの確率空間上で定義される確率分布をそれぞれ提案し，それらが Zipf の度数分布よりも一般的であり，優れているとの主張がなされている。そこで，今後は，これらの成果を検討し本論文が用いたような演繹的方法で Bradford の法則の数式表現を修正・洗練させていく必要もあるだろう。

1) 「skew distribution」とは，分布の左極に度数が集中し，「J」を横に寝かせたようなかたちになる分布を指す。

2) 海野敏. Bradford の法則の数式表現—その歴史的展開. Library and Information Science. No. 24, p. 11-29 (1986).
3) Kendall, M. G. The bibliography of operational research. Operational Research Quarterly. Vol. 11, No. 1-2, p. 31-36 (1960).
4) Simon, Herbert A. On a class of skew distribution functions. Biometrika. Vol. 42, p. 425-440 (1955).
5) Fairthrone, Robert A. Empirical hyperbolic distributions (Bradford-Zipf-Mandelbrot) for bibliometric description and prediction. Journal of Documentation. Vol. 25, No. 4, p. 319-343 (1969).
6) Brookes, B. C. Bradford's law and the bibliography of science. Nature. Vol. 224, No. 5223, p. 58-66 (1969).
7) 小野寺夏生. 'Bibliostatistics' —情報現象の統計学的説明—. 情報管理. Vol. 21, No. 10, p. 782-802 (1979).
8) Yablonsky, A. On fundamental regularities of the distribution of scientific productivity. Scientometrics. Vol. 2, No. 1, p. 3-34 (1980).
9) Haitun, S. D. Stationary scientometric distribu-

tions part I. different approximations. Scientometrics. Vol. 4, No. 1, p. 5-25 (1982).
10) Egghe, L. Consequences of Lotka's law for the law of Bradford. Journal of Documentation. Vol. 41, No. 3, p. 173-189 (1985).
11) Price, Derek J. de Solla. A general theory of bibliometric and other cumulative advantage precess. Journal of the American Society for Information Science. Vol. 27, No. 5, p. 292-306 (1976).
12) これらの演繹モデルからは，最終的にはベータ関数 cB (ρ, α) が導かれる。
13) 前者は，Haspers, Jan H. The yield formula and Bradford's law. Journal of the American Society for Information Science. Vol. 27, No, 5-6, p. 281-287 (1976).
後者は，Bulick, Stephen. Book use as a Bradford -Zipf phenomenon. College and Research Libraries. Vol. 39, No. 3, p. 215-219 (1978).
14) Bradford, Samuel C. Sources of information on specific subjects. Engineering. Vol. 137, p. 85-86 (1934).
15) Leimkuhler, Ferdinand F. The Bradford distribution. Journal of Documentation. Vol. 23, No. 3, p. 193-207 (1967).
16) Asai, Isao. A general formulation of Bradford's distribution : the graph-oriented approach. Journal of the American Society for Information Science, Vol. 32, No. 2, p. 113-119 (1981).
17) Goffman, W ; Morris, T. G. Dispersion of papers among journals based on a mathematical analysis of two diverse medical literatures. Nature. Vol. 221, p. 1205-1207 (1969).
18) Saracevic, T ; Perk, L. J. Ascertaining activity in a subject area through bibliomeric analysis. Journal of the American Society for Information Science, Vol. 24, No. 2, p. 120-134 (1973).
19) 森口繁一；宇田川銈久；一松信．岩波数学公式Ⅲ特殊関数．東京，岩波書店，1960．307p.
20) Rao, I. K. Ravichandra. The distribution of scienific productivity and social change. Journal of the American Society for Information Science. Vol. 31, No. 2, p. 111-122 (1980).
21) Sichel, H. S. A bibliometric distribution which really works. Journal of the American Society for Information Science. Vol. 36, No. 5, p. 314-321 (1985).
22) Burrell, Quentin L. Modelling the Bradford phenomenon. Journal of Documentation. Vol. 44, No. 1, p. 1-18 (1988).